УДК 512.542

О ПРОИЗВОДНОЙ ДЛИНЕ КОНЕЧНОЙ РАЗРЕШИМОЙ ГРУППЫ

Д.А. Ходанович

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель

ON THE DERIVATIVE LENGTH OF A FINITE SOLVABLE GROUP

D.A. Hodanovich

F. Scorina Gomel State University, Gomel

Получены верхние оценки производной длины фраттиниевой фактор-группы в зависимости от индексов максимальных подгрупп разрешимой группы, не содержащих подгруппу Фиттинга.

Ключевые слова*: конечная группа, разрешимая группа, максимальная подгруппа, подгруппа Фиттинга, подгруппа Фраттини, производная длина.*

The upper estimations of the derivative length of the Frattini quotient group depending on the indices of the maximal subgroups which do not contain a Fitting subgroup in the solvable group have been obtained.

Keywords: *finite group, solvable group, maximal subgroup, Fitting subgroup, Frattini subgroup, derivative length.*

Введение

Рассматриваются только конечные группы. Все обозначения и используемые определения соответствуют [1], [2].

Любая разрешимая группа обладает нормальным рядом с абелевыми факторами. Длина самого короткого такого ряда называется производной длиной группы G и обозначается через $d(G)$ [1, глава 4.2]. Ясно, что $d(G)=1$ тогда и только тогда, когда G – неединичная абелева группа. Для любого натурального числа $k>1$ и разрешимой группы G в точности тогда $d(G)=k$, когда $G\in\mathfrak{A}^k\setminus\mathfrak{A}^{k-1}$. Здесь $\mathfrak{A}$ – формация всех абелевых групп, а $\mathfrak{A}^k$ – произведение k копий формации $\mathfrak{A}$ [1, глава 5.1], [2, глава 1.1].

Для натурального k через $\rho(k)$ и $\sigma(k)$ обозначают соответственно максимум производных длин вполне приводимых разрешимых подгрупп и вполне приводимых подгрупп нечетного порядка полной линейной группы $GL(k,\mathbb{F})$, где $\mathbb{F}$ – поле. Согласно [3] такие функции

$$\rho(k):\mathbb{N}\to\mathbb{N},\ \sigma(k):\mathbb{N}\to\mathbb{N}$$

существуют и не зависят от поля $\mathbb{F}$. Значения функций $\rho(k)$ и $\sigma(k)$ известны для каждого натурального k.

Хорошо известно, что в разрешимой группе индекс каждой максимальной подгруппы является степенью некоторого простого числа. На основе этого факта в 2004 году В.С. Монахов [4] ввел следующую функцию

$$m(G)=\max_{p\in\pi(G)}\{\log_p|G:M|\,|\,M<_{\max}G,|G:M|=p^a\}$$

и установил общую закономерность [4, теорема 1 (2)] между производной длиной каждой разрешимой группы G и значениями функций $\rho(k)$ и $m(G)$:

$$d(G/\Phi(G))\le 1+\rho(m(G))\le 3+m(G).$$

Здесь $\pi(G)$ – множество всех простых делителей порядка разрешимой группы G. Запись $M<_{\max}G$ означает, что M – максимальная подгруппа группы G, а $\Phi(G)$ – подгруппа Фраттини группы G.

В другой статье В.С. Монахова [5] показано, что наибольшее значение $m(G)$ достигается на индексах тех максимальных подгрупп разрешимой группы G, которые не содержат подгруппу Фитинга $F(G)$. Поэтому вполне естественно исследовать влияние индексов не всех, а только некоторых выделенных максимальных подгрупп на производную длину разрешимой группы. К данной тематике относится настоящая заметка.

Для любого натурального k в каждой разрешимой группе G выделим следующие множества подгрупп:

$$\mathcal{M}(G)=\{M<_{\max}G\,|\,F(G)\not\subseteq M\};$$

$$\mathcal{M}_{\rho(k)}(G)=\{M\in\mathcal{M}(G)\,|\,d(M)>\rho(k)\}.$$

Множество $\mathcal{M}(G)$ состоит из всех максимальных подгрупп группы G, не содержащих подгруппу Фиттинга $F(G)$ группы G, и в силу [5] оно непусто в каждой неединичной разрешимой группе G. В зависимости от значения k множество $\mathcal{M}_{\rho(k)}(G)$ может быть как пустым, так и не пустым. Например, $\mathcal{M}(S_4)=\mathcal{M}_{\rho(1)}(S_4)=\{S_3^x\,|\,x\in S_4\}$ непусто, а $\mathcal{M}_{\rho(k)}(S_4)$ пусто для любого натурального $k\ge 2$. Здесь S_n – симметрическая группа степени n.

1 Вспомогательные утверждения

Как обычно, подгруппу Фраттини и Фиттинга обозначаем через $\Phi(G)$ и $F(G)$ соответственно, а полупрямое произведение групп A и B с нормальной в AB подгруппой A через $[A]B$. Коммутант группы G обозначается через G', а $G^{(i)}=(G^{(i-1)})'$ – i-й коммутант группы G. Согласно [1, лемма 4.6] выполняется равенство $(G/N)^{(i)}=G^{(i)}N/N$ для любого натурального i и любой нормальной подгруппы N. Для любой группы G можно построить цепочку коммутантов

$$G\supseteq G'\supseteq G^{(2)}\supseteq\ldots\supseteq G^{(i)}\supseteq G^{(i+1)}\supseteq\ldots.$$

Если существует номер n такой, что $G^{(n)}=1$, то группа G называется разрешимой. Наименьшее натуральное n, для которого $G^{(n)}=1$, называется производной длиной группы G и обозначается через $d(G)$. Несложно проверить, что значение $d(G)$ совпадает с длиной самого короткого нормального ряда группы G с абелевыми факторами.

Лемма 1.1. *Для разрешимой группы G справедливы следующие утверждения:*

1) *если H – подгруппа группы G, то*
$$d(H)\le d(G);$$

2) *если N – нормальная подгруппа группы G, то $d(G/N)\le d(G)\le d(N)+d(G/N)$;*

3) $d(G/\Phi(G))\le 1+d(G/F(G))$;

4) *если $t\in\mathbb{N}$, $t\le d(G)$, то*
$$d(G^{(t)})=d(G)-t \text{ и } d(G/G^{(t)})=t;$$

5) $G^{(d(G)-1)}\subseteq F(G)$ *и* $d(G/F(G))\le d(G)-1$.

Доказательство. 1. Утверждения 1–2 вытекают непосредственно из определения производной длины и равенства $(G/N)^{(i)}=G^{(i)}N/N$.

3. Согласно [1, теорема 4.24] фактор-группа $F(G)/\Phi(G)$ абелева. Применим утверждение 2 к группе $G/\Phi(G)$ с нормальной подгруппой $F(G)/\Phi(G)$:

$$d(G/\Phi(G))\le d(F(G)/\Phi(G))+$$
$$+d((G/\Phi(G)/(F(G)/\Phi(G))\le 1+d(G/F(G)).$$

4. Пусть $n=d(G)$, $t\in\mathbb{N}$, $t\le n$. Тогда

$$G\supset G'\supset G^{(2)}\ldots\supset G^{(t-1)}\supset G^{(t)}\supset$$
$$\supset G^{(t+1)}\supset\ldots\supset G^{(n-1)}\supset G^{(n)}=1,$$
$$G^{(t)}\supset G^{(t+1)}\supset\ldots\supset G^{(n-1)}\supset G^{(n)}=1$$

и $d(G^{(t)})=n-t=d(G)-t$. Поскольку

$$G/G^{(t)}\supset G'/G^{(t)}\supset$$
$$\supset G^{(2)}/G^{(t)}\ldots\supset G^{(t-1)}/G^{(t)}\supset G^{(t)}/G^{(t)}=1,$$

то $d(G/G^{(t)})=t$.

5. Подгруппа $G^{(d(G)-1)}$ абелева и нормальна в G, поэтому

$$G^{(d(G)-1)}\subseteq F(G) \text{ и } d(G/F(G))\le d(G)-1$$

по 4. Лемма доказана.

В доказательствах будут использоваться фрагменты теории формаций. Пусть $\mathfrak{E}$ – формация всех конечных групп, $\mathfrak{F}$ – некоторая формация и G – группа. Тогда $G^{\mathfrak{F}}$ – $\mathfrak{F}$-корадикал группы G, т. е. Пересечение всех тех нормальных подгрупп N из G, для которых $G/N\in\mathfrak{F}$. Произведение $\mathfrak{F}\mathfrak{H}=\{G\in\mathfrak{E}\mid G^{\mathfrak{H}}\in\mathfrak{F}\}$ формаций $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ состоит из всех групп G, для которых $\mathfrak{H}$-корадикал принадлежит формации $\mathfrak{F}$. Как обычно, $\mathfrak{F}^2=\mathfrak{F}\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F}^n=\mathfrak{F}^{n-1}\mathfrak{F}$ для любого натурального $n>1$. Формация $\mathfrak{F}$ называется насыщенной, если из условия $G/\Phi(G)\in\mathfrak{F}$ следует, что $G\in\mathfrak{F}$. Формации всех абелевых и нильпотентных групп обозначают через $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{N}$ соответственно.

Лемма 1.2. *Пусть G – разрешимая группа и k – натуральное число.*

1. *Тогда и только тогда $d(G)\le k$, когда $G\in\mathfrak{A}^k$.*

2. *Тогда и только тогда $d(G)=k$, когда $G\in\mathfrak{A}^k\setminus\mathfrak{A}^{k-1}$.*

3. *Тогда и только тогда $d(G/\Phi(G))\le k$, когда $G\in\mathfrak{N}\mathfrak{A}^{k-1}$.*

Доказательство. Утверждения 1 и 2 непосредственно вытекают из определений производной длины и произведения формаций.

3. Пусть $d(G/\Phi(G))\le k$. Тогда $G/\Phi(G)\in\mathfrak{A}^k$. Согласно [1, лемма 4.21 (2)] справедливо равенство $F(G/\Phi(G))=F(G)/\Phi(G)$, поэтому из леммы 1.1 (5) следует, что $G/F(G)\in\mathfrak{A}^{k-1}$ и $G\in\mathfrak{N}\mathfrak{A}^{k-1}$. Обратно, пусть $G\in\mathfrak{N}\mathfrak{A}^{k-1}$. Тогда $G/F(G)\in\mathfrak{A}^{k-1}$, а так как $F(G)/\Phi(G)$ абелева, то $G/F(G)\in\mathfrak{A}^{k}$. Лемма доказана.

Лемма 1.3. *Если $\mathfrak{F}$ – формация, то $\mathfrak{N}\mathfrak{F}$ – насыщенная формация.*

Доказательство. Согласно [2, с. 36], произведение $\mathfrak{N}\mathfrak{F}$ является локальной формацией. Поскольку насыщенная формация и локальная формация – эквивалентные понятия, то $\mathfrak{N}\mathfrak{F}$ – насыщенная формация.

Лемма 1.4 [5]. *Пусть G – разрешимая неединичная группа. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *подгруппа Фраттини группы G совпадает с пересечением максимальных подгрупп, не содержащих подгруппу Фиттинга;*

2) *если $H<_{\max}G$ и $|G:H|=p^h$, p – простое, то существует подгруппа $M<_{\max}G$ такая, что выполняются следующие утверждения:*

2.1) *$F(G)$ не содержится в M;*

2.2) $|G:M|=q^m$, *q – простое, и* $h\le m$.

***Лемма* 1.5** [6], [7].

1. *Если* $n=1$, *то* $\rho(n)=1$.
2. *Если* $n\in\{2,3,4\}$, *то* $\rho(n)=n+2$.
3. *Если* $n\in\{5,6,7\}$, *то* $\rho(n)=7$.
4. *Если* $n\in\{8,9\}$, *то* $\rho(n)=n$.
5. *Если* $n\in\{10,...,17\}$, *то* $\rho(n)=10$.
6. *Если* $n\in\{18,...,25\}$, *то* $\rho(n)=11$.
7. *Если* $n\in\{26,...,33\}$, *то* $\rho(n)=12$.
8. *Если* $n\in\{34,...,65\}$, *то* $\rho(n)=13$.
9. *Если* $n\ge 66$, *то* $\rho(n)\le 5\log_9(n-2)+53/10$.

В частности, $\rho(n)\le n+2$. *Кроме того, если* $n\ge 7$, *то* $\rho(n)\le n$, *а если* $n>10$, *то* $\rho(n)<n$.

***Лемма* 1.6** [8, теорема 4B].

1. *Если* $n\in\{1,2\}$, *то* $\sigma(n)=1$.
2. *Если* $n\in\{3,4\}$, *то* $\sigma(n)=2$.
3. *Если* $5\cdot 7^x\le n<15\cdot 7^x$, *то* $\sigma(n)=2x+3$.
4. *Если* $15\cdot 7^x\le n<5\cdot 7^{x+1}$, *то* $\sigma(n)=2x+4$.

Из лемм 1.5 и 1.6 вытекает, что функции $\rho(n)$ и $\sigma(n)$ неубывающие.

2 Основной результат

***Теорема* 2.1.** *Зафиксируем натуральное число* k. *Если* G *– разрешимая группа и индекс каждой подгруппы из* $\mathcal{M}_{\rho(k)}(G)$ *не делится на* p^{k+1} *для всех* $p\in\pi(G)$, *то* $d(G/\Phi(G))\le 1+\rho(k)$.

Отметим, что теорема охватывает все разрешимые группы, у которых $\mathcal{M}_{\rho(k)}(G)=\varnothing$.

Доказательство. Согласно введенному обозначению множество $\mathcal{M}(G)$ состоит из всех максимальных подгрупп группы G, не содержащих подгруппу Фиттинга $F(G)$ группы G. Допустим, что G – неединичная группа и $\mathcal{M}(G)=\varnothing$. Тогда каждая максимальная подгруппа из G содержит $F(G)$. Поэтому пересечение всех максимальных подгрупп, которое является подгруппой Фраттини группы G, также содержит подгруппу Фиттинга. Но это в разрешимых группах невозможно [1, лемма 4.21 (1)]. Поэтому допущение неверно и множество $\mathcal{M}(G)$ непусто у каждой неединичной группы G.

Пусть $h=m(G)$. Тогда в группе G существует максимальная подгруппа H такая, что $|G:H|=p^h$ для некоторого $p\in\pi(G)$. По лемме 1.4 (2) существует максимальная подгруппа $M\in\mathcal{M}(G)$ такая, что $|G:M|=q^m$ для некоторого $q\in\pi(G)$ и $h\le m$. Поскольку $h=m(G)$, то из определения функции $m(G)$ получаем, что $h=m=m(G)$.

Предположим, что M не принадлежит $\mathcal{M}_{\rho(k)}(G)$. Тогда $M\in\mathcal{M}(G)\setminus\mathcal{M}_{\rho(k)}(G)$, M не содержит $F(G)$ и $d(M)\le\rho(k)$. Теперь $G=F(G)M$, а поскольку $G/F(G)\simeq M/M\cap F(G)$, то $d(G/F(G))=d(M/M\cap F(G))\le d(M)\le\rho(k)$. В предпоследнем неравенстве использовалась лемма 1.1 (2). По лемме 1.1 (3)

$$d(G/\Phi(G))\le 1+d(G/F(G))\le 1+\rho(k),$$

и теорема в этом случае справедлива. В частности, теорема доказана в случае $\mathcal{M}_{\rho(k)}(G)=\varnothing$.

В дальнейшем считаем, что M принадлежит $\mathcal{M}_{\rho(k)}(G)$. По условию доказываемой теоремы $|G:M|$ не делится на r^{1+k} для всех $r\in\pi(G)$. Это означает, что $h=m=m(G)\le k$. Теперь, не используя [4, теорема 1(2)], докажем, что $d(G/\Phi(G))\le 1+\rho(k)$.

Если $k=1$, то все максимальные подгруппы группы G имеют простые индексы. По теореме Хупперта [1, теорема 4.55] группа G является сверхразрешимой. Но у сверхразрешимой группы коммутант G' нильпотентен [1, теорема 4.52], поэтому

$$G'\subseteq F(G),\ d(G/F(G))\le 1.$$

Применяя лемму 1.1 (3), получаем

$$d(G/\Phi(G))\le 2=1+\rho(k).$$

Итак, при $k=1$ теорема доказана.

Далее считаем $k\ge 2$. По лемме 1.2 (3) для группы G оценка $d(G/\Phi(G))\le 1+\rho(k)$ равносильна включению $G\in\mathfrak{N}\mathfrak{A}^{\rho(k)}$. Согласно лемме 1.3 произведение $\mathfrak{N}\mathfrak{A}^{\rho(k)}$ является насыщенной формацией.

Проверим, что условия теоремы наследуют все гомоморфные образы группы G. Пусть K – нормальная подгруппа группы G. Если $M_{\rho(k)}(G/K)=\varnothing$, то

$$d((G/K)/\Phi(G/K))\le 1+\rho(k)$$

по доказанному и $G/K\in\mathfrak{N}\mathfrak{A}^{\rho(k)}$ по лемме 1.2 (3). Пусть $\mathcal{M}_{\rho(k)}(G/K)\ne\varnothing$, $X/K\in\mathcal{M}_{\rho(k)}(G/K)$. Предположим, что $|G/K:X/K|$ делится на r^{1+k} для некоторого $r\in\pi(G/K)$. Так как

$$|G/K:X/K|=|G:X|,$$

то $|G:X|$ делится на r^{1+k} для $r\in\pi(G)$. Получили противоречие с тем, что $m(G)\le k$. Поэтому предположение неверно, условия теоремы наследуют все гомоморфные образы группы G, и можно применять индукцию по порядку группы. Следовательно, $G/K\in\mathfrak{N}\mathfrak{A}^{\rho(k)}$ для всех неединичных нормальных подгрупп K. Ввиду леммы 1.3 формация $\mathfrak{N}\mathfrak{A}^{\rho(k)}$ насыщенна, поэтому $\Phi(G)=1$.

Пусть подгруппа Фиттинга $F(G)$ не является минимальной нормальной подгруппой в G. Для разрешимой группы с единичной подгруппой Фраттини подгруппа Фиттинга

$$F(G) = K_1 \times K_2 \times ... \times K_n$$

является прямым произведением минимальных нормальных подгрупп K_i группы G, см. [1, теорема 4.24]. По индукции $G/K_i \in \mathfrak{N}\mathfrak{A}^{\rho(k)}$, а поскольку $\mathfrak{N}\mathfrak{A}^{\rho(k)}$ – формация и $n \geq 2$, то $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{A}^{1+\rho(k)}$.

В дальнейшем считаем, что $F = F(G)$ является единственной минимальной нормальной подгруппой группы G. По [1, теоремы 4.22, 4.24] $F = C_G(F)$, а по [1, теорема 4.23] существует подгруппа M в группе G такая, что $G = [F]M$. Ясно, что M – максимальная подгруппа и

$$|G : M| = |F| = p^t, \quad p \in \pi(G), \quad t \leq k.$$

Поскольку F – элементарная абелева p-подгруппа порядка p^t и $F = C_G(F)$, то M изоморфна G/F и M изоморфна по [1, теорема 2.8] подгруппе из группы $\mathrm{Aut}F$, которая по [1, теорема 2.50] совпадает с $GL(t, p)$. Из того, что F – минимальная нормальная подгруппа группы G следует, что подгруппа M изоморфна неприводимой разрешимой подгруппе группы $GL(t, p)$. Теперь из определения функции ρ получаем:

$$d(M) \leq \rho(t) \leq \rho(k).$$

Из леммы 1.2 (1) следует, что $M \in \mathfrak{A}^{\rho(k)}$, поэтому $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{A}^{\rho(k)}$. Теперь из леммы 1.2 (3) вытекает, что $d(G/\Phi(G)) \leq 1 + \rho(k)$. Теорема доказана.

***Следствие* 2.1.** *Зафиксируем натуральное число k. Пусть G – разрешимая группа и $\Phi(G) = 1$. Если $\mathcal{M}_{\rho(k)}(G) \neq \varnothing$ и индекс каждой подгруппы $M \in \mathcal{M}_{\rho(k)}(G)$ не делится на p^{k+1} для всех $p \in \pi(G)$, то $d(G) = 1 + \rho(k)$.*

Доказательство. Согласно теореме 2.1 $d(G) \leq 1 + \rho(k)$. По условию существует подгруппа $M \in \mathcal{M}_{\rho(k)}(G)$ такая, что $d(M) > \rho(k)$. Теперь из леммы 1.1 (1) получаем, что

$$\rho(k) < d(M) \leq d(G) \leq 1 + \rho(k),$$

что возможно только в случае $d(m) = d(G) = 1 + \rho(k)$. Следствие доказано.

Согласно теореме Томпсона–Фейта любая группа нечетного порядка разрешима. Для них воспользуемся функцией $\sigma(k)$. Таким образом, для группы G нечетного порядка через $\mathcal{M}_{\sigma(k)}(G)$ обозначим множество всех максимальных подгрупп M, обладающих следующими свойствами: M не содержит подгруппу Фиттинга; $d(M) > \sigma(k)$. Повторяя доказательство теоремы с заменой функции $\rho(k)$ на $\sigma(k)$ получаем

***Следствие* 2.2.** *Зафиксируем натуральное число k. Если G – группа нечетного порядка и индекс каждой подгруппы $M \in \mathcal{M}_{\sigma(k)}(G)$ не делится на p^{k+1} для всех $p \in \pi(G)$, то $d(G/\Phi(G)) \leq 1 + \sigma(k)$.*

Конкретизируя значения k и используя леммы 1.5 и 1.6, получаем еще два следствия.

***Следствие* 2.3.** *Пусть $k \in \mathbb{N}$. Предположим, что в разрешимой группе G индекс каждой подгруппы $M \in \mathcal{M}_{\rho(k)}(G)$ не делится на p^{k+1} для всех $p \in \pi(G)$. Тогда:*

1) *если $k = 1$, то $d(G/\Phi(G)) \leq 2$;*
2) *если $k \in \{2,3,4\}$, то $d(G/\Phi(G)) \leq 3 + k$;*
3) *если $k \in \{5,6,7\}$, то $d(G/\Phi(G)) \leq 8$;*
4) *если $k \in \{8,9\}$, то $d(G/\Phi(G)) \leq 1 + k$;*
5) *если $k \in \{10,...,17\}$, то $d(G/\Phi(G)) \leq 11$;*
6) *если $k \in \{18,...,25\}$, то $d(G/\Phi(G)) \leq 12$;*
7) *если $k \in \{26,...,33\}$, то $d(G/\Phi(G)) \leq 13$;*
8) *если $k \in \{34,...,65\}$, то $d(G/\Phi(G)) \leq 14$;*
9) *если $k \geq 66$, то*
$$d(G/\Phi(G)) \leq 1 + 5\log_9(k-2) + 53/10.$$

***Следствие* 2.4.** *Пусть $k \in \mathbb{N}$. Предположим, что в группе G нечетного порядка индекс каждой подгруппы $M \in \mathcal{M}_{\sigma(k)}(G)$ не делится на p^{k+1} для всех $p \in \pi(G)$. Тогда:*

1) *если $k \in \{1,2\}$, то $d(G/\Phi(G)) \leq 2$;*
2) *если $k \in \{3,4\}$, то $d(G/\Phi(G)) \leq 3$;*
3) *если $5 \cdot 7^x \leq k < 15 \cdot 7^x$, то*
$$d(G/\Phi(G)) \leq 4 + 2x;$$
4) *если $15 \cdot 7^x \leq k < 5 \cdot 7^{x+1}$, то*
$$d(G/\Phi(G)) \leq 5 + 2x.$$

Отметим, что доказанная теорема и ее следствия развивают результаты работы [9], в которой найдены оценки нильпотентной длины разрешимой группы с ограниченными индексами неметанильпотентных максимальных подгрупп.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Монахов, В.С.* Введение в теорию конечных групп и их классов / В.С. Монахов. – Мн. : Вышэйшая школа. – 2006. – 207 с.

2. *Шеметков, Л.А.* Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М. : Наука, 1978.– 272 с.

3. *Zassenhaus, H.* Beweis eines Zatzes uber diskrete Gruppen / H. Zassenhaus // Abb. Math. Sem. Univ. Hamburg. – 1938. – Bd. 12. – S. 289–312.

4. *Монахов, В.С.* Об индексах максимальных подгрупп конечных разрешимых групп / В.С. Монахов // Алгебра и логика. – 2004. – Т. 43, № 4. – С. 411–424.

5. *Монахов, В.С.* Замечания о максимальных подгруппах конечных групп / В.С. Монахов // Доклады Национальной академии наук Беларуси. – 2003. – Т. 47, № 4. – С. 31–33.

6. *Dixon, J.D.* The solvable length of a solvable linear groups / J.D. Dixon // Math. Z. – 1968. – Bd. 12. – S. 151–158.

7. *Newman, M.F.* The solvable length of a solvable linear groups / M.F. Newman // Math. Z. – 1972. – Bd. 126. – S. 59–70.

8. *Palfy, P.P.* Bounds for linear groups of odd order / P.P. Palfy // Rend. Circ. mat. Palermo. – Ser. 2. 1990. – 39. Suppl. № 23. – P. 253–263.

9. *Монахов, В.С.* О влиянии индексов максимальных подгрупп на нильпотентную длину конечной разрешимой группы / В.С. Монахов, Д.А. Ходанович // Доклады НАН Беларуси. – 2006. – Т. 50, № 4. – С. 23–28.

Поступила в редакцию 15.08.11.